Eléments sur les suites

Nous étudierons ici les suites à valeurs dans $\mathbf{R}$, définies à partir d'un certain rang p. Sans précision particulière, les suites sont supposées définies à partir du rang $n = 0$. Dans le cas contraire, il suffit d'adapter les résultats à la suite (u_{n+p}).

I - Quelques définitions

1) Limite finie

Soit une suite u et un réel l.

On dit que (u_n) a pour limite l quand n tend vers $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs u_n à partir d'un rang N, c'est-à-dire :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbf{N} \quad \forall n \geq N, \quad l - \epsilon < u_n < l + \epsilon$$

.
On écrit alors :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = l$$

Lorsqu'elle existe, la limite l est unique. .

2) Limite infinie

On dit que u_n a pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si tout intervalle du type $[A; +\infty[$ (où A est un réel quelconque) contient toutes les valeurs u_n à partir d'un rang N, c'est-à-dire :

$$\forall A \in \mathbf{R} \quad \exists N \in \mathbf{N} \quad \forall n \geq N, u_n \geq A$$

On écrit alors :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

Remarques :

1. En remplaçant l'intervalle $[A; +\infty[$ par un intervalle du type $]-\infty; B]$, on obtient une suite dont la limite est $-\infty$.
2. Une suite qui n'a pas de limite finie ou qui a pour limite $+\infty$ (ou $-\infty$) est dite divergente.

3) Majorant et minorant

Un réel M est un majorant d'une suite (u_n) si et seulement si

$$\forall n \geq 0, u_n \leq M$$

Un réel m est un minorant d'une suite (u_n) si et seulement si

$$\forall n \geq 0, u_n \geq m$$

Une suite qui est majorée et minorée est dite bornée.

Remarque : une suite (u_n) est bornée si et seulement si $(|u_n|)$ est majorée.

4) Sens de variation

On dit qu'une suite (u_n) est croissante si et seulement si $\forall n \in \mathbf{N}, u_n \leq u_{n+1}$
On dit qu'une suite (u_n) est décroissante si et seulement si $\forall n \in \mathbf{N}, u_n \geq u_{n+1}$
On dit qu'une suite (u_n) est monotone si et seulement si elle est croissante ou décroissante.
On dit qu'une suite est constante si et seulement si il existe un réel m tel que $\forall n \in \mathbf{N}, u_n = m$.

Remarques

1. Ces définitions peuvent être seulement valables à partir d'un rang p.
2. Lorsque les termes de la suite sont strictement positifs, on peut étudier le sens de variation de la suite en comparant 1 et $\frac{u_{n+1}}{u_n}$
3. Lorsque les inégalités sont strictes, les suites sont dites strictement (dé)croissantes.

Exercice 1
Montrer que si (u_n) est une suite monotone, alors (v_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par $v_n = \frac{u_1+u_2+...+u_n}{n}$ est aussi monotone (de même sens de variation que (u_n)).

Exercice 2
Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par $u_n = \frac{n!}{n^n}$

Exemple 1 : suite convergente d'entiers relatifs
Nous considérons une suite définie sur $\mathbf{N}$, convergente telle que

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_n \in \mathbf{Z}$$

Montrer que cette suite est constante à partir d'un certain rang.

II - Limite et comparaison

Proposition 1 *Si une suite a pour limite $+\infty$ alors elle est minorée.*
Si une suite a pour limite $-\infty$ alors elle est majorée.

Proposition 2 *Toute suite convergente est bornée.*

La réciproque est fausse.
Par exemple, $u_n = (-1)^n$, $v_n = cos(\frac{n\pi}{2})$ sont bornées mais n'ont pas de limite.

Théorème 1 *On considère deux suites u et v, N un entier naturel tel que $\forall n \geq N, u_n \leq v_n$*
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Exercice 3
Déterminer la limite de la suite définie par $v_n = e^{n^2+1} + \frac{1}{2}\sin(\sqrt{n})$

Proposition 3 *(u_n) et (v_n) sont deux suites telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.*
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l'$ *alors* $l \leq l'$

Les inégalités larges sont essentielles. Même si $u_n < v_n$, la conclusion restera $l \leq l'$. Considérer par exemple les suites définies par $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{2}{n}$.

Exercice 4
On admet que la suite définie par $u_n = \frac{2^n}{n!}$ admet une limite l. Déterminer la valeur de cette limite.

Le théorème d'encadrement suivant est connu sous le nom de "théorème des gendarmes", les suites "gendarmes" encadrent la suite "prévenue" qui ne peut échapper à la convergence ...

Théorème 2 *Soient (u_n), (a_n) et (b_n) trois suites telles qu'à partir d'un certain rang p, on ait $a_n \leq u_n \leq b_n$. Si (a_n) et (b_n) convergent vers la même limite l alors (u_n) est convergente et sa limite est l.*

Remarques :

1. Il est essentiel que les suites (a_n) et (b_n) aient la même limite. Considérer par exemple $a_n = -1$, $b_n = 1$ et $u_n = (-1)^n$.
2. Dans la proposition 3, il faut déjà avoir établi que la suite converge pour conclure. Le théorème des gendarmes assure l'existence de la limite. Ainsi, on pourrait reprendre l'exercice 4 sans avoir à supposer que la limite de la suite existe...
3. Si une suite (u_n) est positive et qu'elle est majorée par une suite de limite nulle alors cette suite (u_n) admet également 0 pour limite

Exercice 5
Étudier la limite éventuelle de la suite de terme général $u_n = n \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k}$, $n \geq 1$

Exemple 2 : suites et parties entières
Nous rappelons que la partie entière d'une réel x est l'unique entier relatif, noté $\lfloor x \rfloor$ qui satisfait à :

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

1. En déduire que, $\forall x \in \mathbf{R}, x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$
2. Considérons la suite (u_n) définie sur $\mathbf{N}^*$ par $u_n = \dfrac{\lfloor ne \rfloor}{n}$.
   Montrer que cette suite est convergente et déterminer sa limite.
3. On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbf{N}^*$ par $v_n = \dfrac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} \lfloor ke \rfloor$.
   Étudier le comportement de (v_n) en $+\infty$

Théorème 3 *Toute suite croissante et majorée converge.*
Toute suite décroissante et minorée converge.

Remarques :

1. Une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$
2. Une suite décroissante non minorée tend vers $-\infty$

Exercice 6

1. Trouver une suite convergente qui n'est pas monotone.
2. Trouver une suite bornée divergente.
3. Trouver une suite non bornée qui ne tend pas vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Exercice 7

Soit (u_n) la suite de terme général : $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

1. Montrer que $\forall k \geq 2$, $\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$
2. En déduire que la suite (u_n) converge.
   La valeur de cette limite est $\frac{\pi^2}{6}$. Ce résultat, démontré pour la première fois par Euler, est connu sous le nom du problème de Bâle.

Exercice 8

Soit la suite (S_n) de terme général : $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ *(cette suite est appelée série harmonique)*

1. Montrer que, $S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}$
2. Raisonner par l'absurde et déduire que (S_n) tend vers $+\infty$
3. Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}^*, S_n \leq 2\sqrt{n}$.
   En déduire que :
   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = 0$$
   On dit que la suite (S_n) est négligeable devant n au voisinage de $+\infty$ et on note $h_n = o(n)$

Exercice 9

Considérons la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$$

1. Étudier la monotonie de la suite.
2. Montrer que la suite est minorée par 0.
3. En déduire que la suite est convergente. *Sa limite est la constante d'Euler, notée habituellement γ.*

III - Suites adjacentes

Deux suites réelles (a_n) et (b_n) sont dites adjacentes lorsque :

1. (a_n) est croissante ;
2. (b_n) est décroissante ;
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} (b_n - a_n) = 0$

Théorème 4 *Deux suites adjacentes sont convergentes et ont même limite l. De plus, cette limite vérifie :*

$$\forall n \in \mathbf{N}, a_n \leq l \leq b_n$$

Preuve :
Notons (u_n) la suite de terme général $u_n = b_n - a_n$.
Cette suite est décroissante car $u_{n+1} - u_n = (b_{n+1} - b_n) - (a_{n+1} - a_n) \leq 0$. De plus, la limite de cette suite est nulle. On déduit que $\forall n \in \mathbf{N}, u_n \geq 0$, soit $a_n \leq b_n$.
La monotonie de chaque suite implique alors que $\forall n \in \mathbf{N} \quad a_0 \leq a_n \leq b_n \leq b_0$.
La suite (a_n) est majorée par b_0 et elle est croissante, par conséquent elle converge vers un réel l tel que $l \geq a_n$, $\forall n \in \mathbf{N}$.
La suite (b_n) est minorée par a_0 et elle est décroissante, par conséquent elle converge vers un réel l' tel que $l' \leq b_n$, $\forall n \in \mathbf{N}$.
De plus, $l = l'$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} (b_n - a_n) = 0$.

Exemple 3 : suite de l'exercice 7
Soit un entier $p \geq 2$ donné. Considérons la suite (v_n) définie sur $\mathbf{N}^*$ par

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}$$

1. Justifier que pour tout entier $k \geq 1, k^p \geq k^2$.

2. En déduire que : $\forall n \in \mathbf{N}^*, v_n \leq u_n$.
   La suite (v_n) converge-t-elle ?

3. Nous supposons que $p = 3$ et nous considérons la suite (w_n) définie sur $\mathbf{N}^*$ par

   $$w_n = v_n + \frac{1}{n^2}$$

   Montrer que les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes.
   Leur limite commune est le nombre d'Apery. Ce dernier est un mathématicien français qui a prouvé que ce nombre est irrationnel en 1979

Exemple 4 : Suites extraites
Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbf{N}$.

1. Considérons les suites (v_n) et (w_n) telles que pour tout entier naturel n, $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$
   Montrer que si les suites (v_n) et (w_n) convergent vers un même réel l alors la suite (u_n) converge elle aussi vers l.
   Étudier la réciproque.
2. Application. Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbf{N}^*$ par

   $$u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - ... + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

   Montrer que les deux suites extraites (v_n) et (w_n) définies ci-dessus (sur $\mathbf{N}^*$) sont adjacentes. Que peut-on alors dire de la suite (u_n) ?
   On peut démontrer que la valeur de cette limite est $\ln(2)$

Exemple 5 : $\mathbf{Q}$ est dense dans $\mathbf{R}$

(a) Montrer que pour tout réel a et pour tout entier naturel $k \geq 1$, on a

$$0 \leq \lfloor ka \rfloor - k\lfloor a \rfloor \leq k-1$$

(b) Soient un réel x et un entier $p \geq 2$.
Considérons les suites (a_n) et (b_n) définies sur $\mathbf{N}$ par $a_n = \dfrac{1}{p^n}\lfloor p^n x \rfloor$ et $b_n = a_n + \dfrac{1}{p^n}$.
Justifier que $\forall n \in \mathbf{N}, 0 \leq \lfloor p^{n+1}x \rfloor - p\lfloor p^n x \rfloor \leq p-1$.
En déduire que $\forall n \in \mathbf{N}, 0 \leq a_{n+1} - a_n \leq \dfrac{1}{p^n} - \dfrac{1}{p^{n+1}}$

(c) Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes

(d) Justifier que les suites (a_n) et (b_n) convergent vers le réel x

(e) Justifier alors que : "$\mathbf{Q}$ est dense dans $\mathbf{R}$", c'est-à-dire que, quel que soit le réel x, il existe une suite de nombres rationnels qui converge vers le réel x.

Exercice 10
Reprenons la suite (u_n) définie à l'exercice 9.
Prouver que (u_n) et (v_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$ sont adjacentes.

Exercice 11
On définit, pour tout entier naturel $n \geq 1$, deux suites (a_n) et (b_n) de terme général :

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \text{ et } b_n = a_n + \frac{1}{nn!}$$

(a) Justifier que (a_n) est croissante puis que (b_n) est décroissante.

(b) Justifier que $\lim\limits_{n \to +\infty} (b_n - a_n) = 0$

(c) En déduire que les deux suites (a_n) et (b_n) convergent vers un même réel.
Ce réel est le nombre e, base des logarithmes népériens

(d) Montrons que e est un nombre irrationnel. Raisonnons pour cela par l'absurde et supposons que e est un nombre rationnel.

Exercice 12
On considère deux suites réelles (u_n) et (v_n) vérifiant $0 < u_0 < v_0$ et

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \qquad \textit{et} \qquad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

(a) Justifier que tous les termes des suites (u_n) et (v_n) sont strictement positifs.

(b) Justifier que pour tout entier naturel n, $u_n < v_n$.

(c) En déduire le sens de variation de chacune des deux suites.

(d) Montrer que ces deux suites ont la même limite l.

(e) Montrer que, quel que soit l'entier naturel n, $u_n v_n = u_0 v_0$. En déduire que $l = \sqrt{u_0 v_0}$.

IV - Relations de récurrence

1) Suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Pour étudier une suite de ce type, il est souvent utile d'étudier les variations de la fonction f et de déterminer un intervalle I qui contient toutes les valeurs de la suite.

Théorème 5 *Si f est une fonction croissante sur I alors la suite (u_n) est monotone.*
Si $u_0 \leq u_1$ alors la suite (u_n) est croissante. Sinon, elle est décroissante.

Théorème 6 *Si la suite (u_n) est convergente vers l et si f est continue alors l vérifie $l = f(l)$.*

Exercice 13
Etudier la suite (u_n) définie par $u_0 = 0,5$ et la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 + 0,1875$.

2) Une suite récurrente d'ordre deux : la suite de Fibonacci

La suite de Fibonacci est définie sur $\mathbf{N}$ par $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ et la relation de récurrence
$f_{n+1} = f_{n+1} + f_{n-1}$ $(n \in \mathbf{N})$

(a) Établir par récurrence que quel que soit l'entier naturel n, $f_n \in \mathbf{N}$

(b) En déduire le sens de variation de la suite (f_n)

(c) Montrer par récurrence que :

   i. $\forall n > 0,\ f_n^2 = f_{n-1}f_{n+1} + (-1)^{n+1}$

   ii. $\forall n > 0,\ f_n^2 = \sum_{k=0}^{n} f_k^2 = f_n f_{n+1}$

3) Suites arithmétiques

On appelle ainsi les suites (u_n) vérifiant une relation de récurrence du type $u_{n+1} = u_n + a$ où a est un réel fixé. On a alors $u_n = u_0 + na$ et on dit que la suite est arithmétique de raison a.

4) Suites géométriques

On appelle ainsi les suites (u_n) vérifiant une relation de récurrence du type $u_{n+1} = qu_n$ où q est un réel fixé.. On a alors $u_n = q^n u_0$ et on dit que la suite est géométrique de raison q.
Si $|q| > 1$, la suite diverge.
Si $|q| < 1$, la suite converge vers zéro.
Si $q = 1$, la suite est constante.

5) Suites définies par une récurrence homographique

On dit qu'une suite (u_n) vérifie une récurrence homographique si elle vérifie une relation de récurrence du type

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad u_{n+1} = h(u_n)$$

avec

$$h(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, \qquad ad - bc \neq 0$$

Une telle suite est définie pour tout n si et seulement si aucune de ses valeurs n'annule le dénominateur de h. L'exercice qui suit permet d'exprimer explicitement u_n.

Exercice 14

(a) Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation $h(x) = x$ (E)

(b) On suppose que l'équation (E) possède deux solutions distinctes, on note α et β ces deux solutions.

i. Justifier que $\frac{h(x)-\alpha}{h(x)-\beta} = k\frac{x-\alpha}{x-\beta}$ où k est un réel que l'on précisera.

ii. En déduire que, quel que soit l'entier naturel n, $\frac{u_n-\alpha}{u_n-\beta} = k^n\frac{u_0-\alpha}{u_0-\beta}$

(c) On suppose que l'équation (E) possède une racine double que l'on note α.

i. Justifier que $\frac{1}{h(x)-\alpha} = \frac{1}{x-\alpha} + k$

ii. En déduire que, quel que soit l'entier naturel n, $\frac{1}{u_n-\alpha} = \frac{1}{u_0-\alpha} + kn$ où k est un réel que l'on précisera.

V - Vu au concours général en 2024

1 Problème 1 : étude d'une suite

Pour tout réel $a \geqslant 0$, on appelle suite associée à α la suite (u_n) définie par $u_0 = \alpha$ et

$$u_{n+1} = \frac{1}{n+1} + \sqrt{u_n} \text{ pour tout entier } n \geqslant 0.$$

Partie 1 : Généralités

1. Soit α un réel positif. Démontrer que la suite (u_n) associée à α vérifie $u_n \geqslant 0$, pour tout entier $n \geqslant 0$.
2. Soit α et β deux réels tels que $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta$. On note (u_n) la suite associée à α et (v_n) la suite associée à β.

   Démontrer que $u_n \leqslant v_n$, pour tout entier $n \geqslant 0$.
3. On note (w_n) la suite associée à 0. Démontrer que $w_n \geqslant 1$, pour tout entier $n \geqslant 1$.
4. Soit α un réel positif ou nul. On suppose que la suite (u_n) associée à α converge vers un réel ℓ.

   Déterminer la valeur de ℓ.
5. Soit α un réel tel que $\alpha > \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.
   Justifier que la suite associée à α est strictement décroissante.

   Que peut-on en déduire en terme de convergence ?

Partie 2 : Un cas particulier

Dans toute cette partie, on note (t_n) la suite associée à 4 et on définit la suite (s_n) par

$$s_n = n(t_n - 1), \text{ pour tout entier } n \geqslant 0.$$

6. Démontrer, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'encadrement :

$$1 + \frac{2}{n} \leqslant t_n \leqslant 1 + \frac{3}{n}.$$

7. Démontrer, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'encadrement :

$$2 \leqslant s_n \leqslant 2 + \frac{6}{n}.$$

8. Déterminer la limite de $\dfrac{t_n - 1 - \frac{2}{n}}{\frac{1}{n}}$ quand n tend vers $+\infty$.

Partie 3 : Retour au cas général

9. Soit α un réel positif ou nul. La suite (u_n) associée à α est-elle convergente ?
10. Déterminer la limite de $\dfrac{t_n - 1 - \frac{2}{n}}{\frac{1}{n}}$ quand n tend vers $+\infty$.